Chapitre 12 : espaces vectoriels - Partie 1
Feuille d'exercices

Exercice 1 Écrire le "vecteur" u suivant comme combinaison linéaire des vecteurs v et w.

1. Dans $\mathbb{R}^3$: $u = (0, 5, -5)$ avec $v = (3, 1, 2)$, $w = (2, -1, 3)$
2. Dans $\mathbb{R}[x]$: $u = x^2 + 2x - 1$ avec $v = x^2 + 1$ et $w = x - 1$
3. Dans $\mathcal{A}(]0, 1[, \mathbb{R})$: $u : x \mapsto \dfrac{1}{x(x-1)}$ avec $v : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $w : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$
4. Dans $\mathbb{R}^3$: $u = (1, 2, 3)$ pour $v = (2, 4, -2)$, $w = (-3, -6, 3)$

Exercice 2 Soient x, y et z trois réels. Déterminez des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ de $\mathbb{R}^3$ qui ne dépendent pas de x, y et z et qui vérifient $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ dans les cas suivants (on pourra avoir besoin de moins de 3 vecteurs) :

1. $\vec{u} = (x, 3y, 2z)$
2. $\vec{u} = (x + y, y - 2z, x + y + z)$
3. $\vec{u} = (x, x, y + z)$
4. $\vec{u} = (y - x + 2z, z - y + 3x, x + 3y - 4z)$
5. $\vec{u} = (y, 4y, 2y)$
6. $\vec{u} = (x, x + y, y)$
7. $\vec{u} = (x + y, y + z, 0)$

Exercice 3 Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'ensemble F considéré est un sous espace vectoriel de l'ensemble E proposé

1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + 2y = 0\}$ avec $E = \mathbb{R}^2$
2. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + 2y = 3\}$ avec $E = \mathbb{R}^2$
3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x + y\}$ avec $E = \mathbb{R}^3$
4. F est l'ensemble des polynômes qui admettent 0 comme racine multiple. ($E = \mathbb{R}[X]$).
5. F est l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. E est l'ensemble des fonctions réelles ($E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$).
6. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 0\}$ avec $E = \mathbb{R}^2$.
7. F est l'ensemble des suites réelles convergentes. E l'ensemble des suites réelles ($E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$).
8. $F = \{(u_n); \forall n, u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2\}$. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
9. $F = \{(a + b, a - b) | (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ avec $E = \mathbb{R}^2$.
10. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); MA = AM\}$. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 4 Les familles suivantes sont-elles des familles libres, liées ? Sont-elles génératrices de l'espace vectoriel E proposé ? Sont-elles des bases de l'espace vectoriel E proposé ?

1. Dans $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{D} = ((1,3),(2,1))$.
2. Dans $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = ((2,3,4),(1,5,7))$.
3. Dans $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{G} = ((9,-3,7),(1,8,8),(5,-5,1))$
4. Dans $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{G} = ((1,-3,7),(1,5,8),(2,-5,0),(0,1,6))$
5. Dans $E = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{I} = ((2,1,3,4),(0,1,0,1),(2,2,3,0))$
6. Dans E l'espace vectoriel des suites réelles, $\mathcal{J} = ((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}})$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$, $v_n = 2^n$, $w_n = 3^n$
7. $\mathcal{K} = (x^2, x(1-x), (1-x)^2)$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$.
8. Dans $E = \mathcal{A}(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[; \mathbb{R})$. $\mathcal{H} = (\cos, \tan, \sin)$
9. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*; \mathbb{R})$. $\mathcal{L} = (\ln, \exp, \sin)$

Exercice 5 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrez que l'ensemble F des polynômes qui admettent 1 comme racine est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminez une base de F et sa dimension.

Exercice 6 Soit l'ensemble E défini par :

$$E = \{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}); \exists a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tels que } f : x \mapsto (ax^2 + bx + c)\sin(x)\}$$

Montrez que E est un sous espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R})$, déterminez-en une base et donnez $\dim(E)$.

Exercice 7 Soient $P_1(x) = x^2 + 2x + 1$, $P_2(x) = x^2 + x + 1$ et $P_3(x) = x^2 + x$.
Montrez que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 8 Soient les ensembles

$$E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + z - t = 0\}$$

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x = y\}$$

1. Montrez que E et F sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Précisez les dimensions de E et de F et donner une base de chacun de ces espaces.
3. Déterminez $E \cap F$ et donnez-en une base $\mathcal{B}$

Exercice 9 On définit les applications f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 de $\mathcal{A}(\mathbb{R}^*+, \mathbb{R})$ par :
$\forall x > 0$, $f_1(x) = \ln x$, $f_2(x) = e^x$, $f_3(x) = e^{x-1}$, $f_4(x) = \ln(4x^3)$, $f_5(x) = 1$.

1. La famille $(f_1, f_2, \ldots, f_5)$ est-elle libre ?
2. Soit l'espace vectoriel $E = \text{Vect}(f_1, f_2, \ldots, f_5)$.
   Donner une sous-famille de $(f_1, f_2, \ldots, f_5)$ qui soit une base de E.

Exercice 10 Soit l'espace vectoriel E engendré par (f_1, f_2, f_3, f_4) où les applications f_1 à f_4 sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \cos(2x),\ f_2(x) = \sin(2x),\ f_3(x) = \cos^2 x,\ f_4(x) = \sin^2 x$$

1. Déterminer une base de E
2. La famille $(f_0; f_1; f_2)$, où f_0 est l'application constante : $x \longmapsto 1$, est-elle également une base de E ?